厳密に解ける摩擦のモデル：点による接触の場合

東北大学大学院情報科学研究科　林　正彦 [1]

単一の不純物によってピン止めされた弾性体における摩擦現象について、厳密に解けるモデルをもちいて解析した。このモデルでは厳密にエネルギー保存則が満たされているので、摩擦によって系の持つ並進のエネルギーが並進に対応しない振動（熱）に変換される過程を調べることが出来る。今回は、ピン止めの強さを変化させたときの系の運動速度の減衰の様子を中心に報告する。

1　導入

固体間の摩擦現象の本質は、「固体の持つ並進の運動エネルギーを熱、すなわち固体の重心運動に無関係な振動モードに変換する」現象であるといえる。この摩擦の第一の性質、すなわち運動の抑制は、あるときは邪魔者として（例えば車輪の軸受けにおける摩擦)、またあるときは有益なもの（例えばブレーキの原理）として、機械文明とは切っても切れない存在であり、産業革命の時代より精力的に研究されてきた。特に、クーロン・アモントンの法則に代表される古典力学の整理された理論として結実している。しかしながら、このような美しい体系が、ミクロな理論からは、まだ良く説明されていないことは、周知の通りであり、現在でも盛んに研究されている。[1, 2]

近年、摩擦の研究において注目されるのは、原子間力顕微鏡など、現代的なナノテクノロジーを用いた研究である。これは、よりミクロなスケールでの摩擦の観測を可能にし、メソスコピックな世界での摩擦という新しい観点を付け加えることが期待出来る。

一方、摩擦による熱の生成の過程は、本質的にミクロ（あるいはメソスコピック）な世界の現象といえる。マクロな系では常に大きな熱浴が存在するため、考えている系は常に熱平衡にあると考えられる。これに対し、メソスコピックまたはミクロな系では熱の生成のミクロなプロセスそのものが問題になりえる。また、純粋に理論的な問題としても、どのように摩擦により熱が発生するのかを解明することは、古来から人間の生活に密接に関連してきた、摩擦と熱との関係に新たな光を当てることになるだろう。

以上のことを念頭に我々は、ピン止めが一つだけ存在する系における摩擦現象を解析する。特に、ピン止めのポテンシャルを工夫することにより、厳密に解けるモデルを考える。本報告においては、系の運動速度の減衰の様子を中心に報告する。

[1] E-mail: hayashi@cmt.is.tohoku.ac.jp

2 モデル

2.1 波動方程式とピン止め

固体のモデルとして、1次元弾性体を考える。この弾性体は、その変位の場 $\psi(x,t)$ が波動方程式を満たすものとする。(x, t はそれぞれ位置および時間変数) さらにここでは、周期的な境界条件を考え、$\psi(0,t)=\psi(L,t)$ が成り立つとする。また、ピン止めの効果は、原点 $x=0$ において、デルタ関数的な力として表現する。[3] このピン止めは、弾性体に対して周期変動する力をおよぼす。以上の条件より、弾性体を記述する方程式として、

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\beta\delta(x)\Gamma(\psi) \tag{1}$$

を得る。$\Gamma(\psi)$ はピン止めのポテンシャルを表しており、$\Gamma(\psi)=\sin\psi$ と取れば、電荷密度波など三角関数型の周期変調を持つ系のピン止めの問題になる。しかし、ここでは微分方程式が厳密に解けるように、

$$\Gamma(\psi)=\begin{cases}1 & na<\psi<\left(n+\frac{1}{2}\right)a\\ -1 & \left(n+\frac{1}{2}\right)a<\psi<na\end{cases} \tag{2}$$

と定義する。ただし、n は整数である。また、α、β は、それぞれ弾性体中の波の速さ、および、ピン止めの強さを表す定数である。

この方程式を、初期条件 $\psi(x,0)=0$、$\partial_t\psi(x,0)=v_0$ の下で解き、その振舞いを β を変えながら調べる。

2.2 解の性質

$x=0$ 以外の点において、解は式 (1) の左辺をゼロにする。すなわち通常の波動方程式の解になっている。今、$\xi=\tau-x$、$\eta=\tau+x$ ($\alpha t=\tau$) と変数変換すれば、

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=\beta\delta(\xi-\eta)\Gamma(\psi) \tag{3}$$

となる。この方程式の解は、$x\neq 0$ の領域で $\psi(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$ (ただし、f, g は適当な関数) と書けるので、全領域での解は次のように構成することが出来る。

1) ψ に空間変化が生じるのは $x=0$ においてのみである。よって、解は $x=0$ で生じた空間変化がピン止めを中心として正および負の方向に伝搬していく形になる。

2) 周期的境界条件のために伝搬していった波は L だけ進むと $x=0$ に戻ってくる。

解を構成する基本領域は図1のように分割される。解は各領域において、ψ_n^+, ψ_n^-, $\tilde{\psi}_n$ ($n=0,1,2,\cdots$) の3つの関数で書けることが分かる。さらに $x=0$ におけるデルタ関数を考慮し、

$$\int_{\eta-\epsilon}^{\eta+\epsilon}d\eta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=\partial_\xi\psi(\eta+\epsilon,\eta)-\partial_\xi\psi(\eta-\epsilon,\eta)=\beta\Gamma(\psi(\eta,\eta)) \tag{4}$$

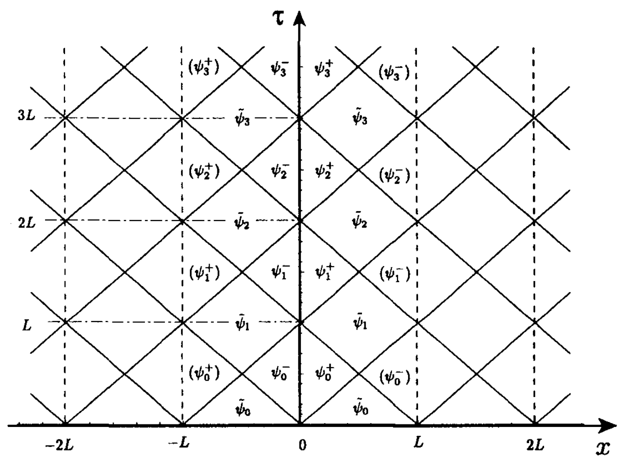

図 1: 解を構成する基本領域：斜めの線はピン止めの位置から伝搬していく空間変化を表している。

を用いて式変形を行うと、方程式は $x=0$ における値 $\psi_n^+(0,t)=\psi_n^-(0,t)$ に対する方程式に帰結出来ることが分かる。$\psi_n(\tau)=\psi_n^+(0,t)=\psi_n^-(0,t)$ と書くと、この方程式は、

$$\psi_n(\tau)=K(\tau)+G(\tau)+F_n(\tau) \tag{5}$$

$$G(\tau)=2\sum_{k=1}^{n-1}F_k(\tau) \tag{6}$$

$$\frac{dF_n(\tau)}{d\tau}=\beta\Gamma(K(\tau)+G(\tau)+F_n(\tau)) \tag{7}$$

に帰結出来る。ただし、$K(\tau)=v_0\tau/\alpha$、また $n=0,1,2,\cdots$ である。

3 結果と物理的な意味の考察

式 (7) を解くと、$\psi_n(\tau)$ を求めることが出来る。図 2 に、幾つかのパラメターについてその解を示す。ただし、$\psi(\tau)$ は $\psi_n(\tau)$ を $1\le n\le 10$ について連続に描いたものである。これらのグラフは、$L=10$, $a=2$, $v_0/\alpha=1.267$ の下で計算した結果である。グラフからも分かるように、$\beta=0.5$ では弾性体の運動はグラフの範囲でほとんど減衰していないが、β が大きくなるにつれてピン止めの効き方が大きくなり、$\beta=1.75$ ではすぐに静止することが分かる。さらに大きくすると、弾性体は $x=0$ で完全に静止した状態を取ることが分かる。特に、$\beta=1.0$ の場合について、結果のグラフの上に放物線（点線）を重ねて描いた。これらが一致していることから、この弾性体の運動の減衰の加速度は一定であることが分かる。これはクーロン・アモントンの法則に一致している。

4 まとめと今後の課題

単一ピン止め下の弾性体の運動について厳密に解けるモデルに基づいて調べた。その結果、初期条件で与えておいて弾性体の一様な並進運動はピン止めの効果で減衰し、失われた運動エネル

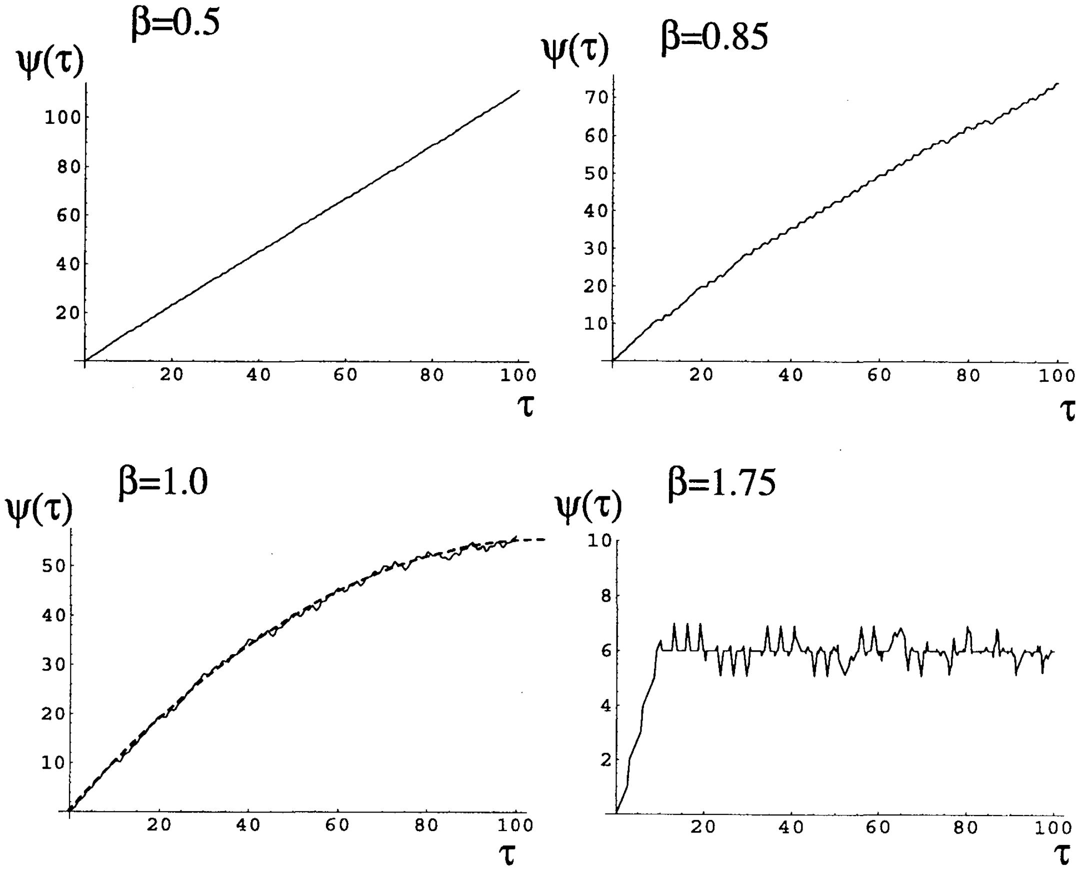

図 2: 幾つかのパラメターに対する解

ギーは並進と無関係な振動のエネルギー（熱）に変換されることが確認出来た。また、このモデルにおいて動摩擦力は速度に依らずに一定であることが分かった。今後は、発生した熱のスペクトルについて解析を行う予定である。また、最大静止摩擦力と動摩擦力の関係についても解析を行う。

謝辞

青山学院大の松川宏氏、東北大の海老澤丕道氏との有益な議論に感謝致します。

参考文献

[1] 松川宏，川端和重，摩擦の物理学－その多様性、階層性、共通点－固体物理 **35**（2000）55.

[2] 摩擦に関する入門書として、B. N. Persson, *Sliding Friction* (Springer, Berlin, 1998).

[3] 本研究と同様なモデルを無限系で調べているものとして、B. N. Persson and A. I. Volokitin, J. Phys.: Condens. Matt. **9** (1997) 2869.